1 Principe d'incertitude suédois

1.1 Commentaires et références

Notation : Pour une fonction mesurable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $S(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$.
On démontre le théorème suivant :

Théorème 1.1.1:

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $S(f)$ et $S(\widehat{f})$ sont de mesure finis. Alors, f est nulle presque partout.

Remarque 1.1.2:

On prend ici la convention suivante pour la transformation de Fourier : $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx$.

Commentaires Le développement est assez technique mais pas très difficile en soit. Il ne demande pas de conaissances très poussée en théorie de Fourier, ne nécessite pas de retenir beaucoup d'idées et n'est pas trop calculatoire. Cependant, il est assez technique en pratique et demande je trouve pas mal d'entrainement.
Il a l'avantage (comme je le précise ci-dessous) de *très bien* se recaser et d'être assez amusant à démontrer je trouve.
Au delà de savoir à peu près démontrer les résultats que l'on utilise dans la preuve, il faut savoir répondre à la question "Pourquoi on parle de principe d'incertitude" si on lui donne ce nom dans le plan ou à l'oral. Je donne mon interprétation en fin de preuve.

Références La référence que j'ai utilisée est "Analyse pour l'agrégation de mathématiques : Oral" (Bernis et Bernis [1, 2003]). La preuve qui y est faite est bien détaillée et précise. Cependant, elle utilise des conventions différentes des miennes pour les séries et transformations de Fourier. Il n'est pas très dur d'y remédier en montrant un énoncé plus général au début de la preuve (cf note ci-après, la preuve est identique). Celui-ci à en plus le mérite de permettre de retomber sur ses pates facilement si on se rend compte pendant le dev qu'on s'est planté (comme moi en cours...).

Recasages Selon moi, ce développement se recase bien dans les leçons :

234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

235 : Problème d'interversions de symboles en analyse

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 : Transformation de Fourier. Exemples et applications

La source recase également dans les leçons 201 et 241 mais je trouve ces recasages peu être un peu plus abusifs.

1.2 Développement

On commence par démontrer le lemme technique suivant.
Note: *C'est ici qu'on démontre un résultat un peu plus général que la source, le paramètre introduit nous permet de jongler facilement entre les conventions.*

Lemme 1.2.1:

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\lambda(S(g)) < \infty$. Alors, pour tout réel $a > 0$, il existe $E_a(g) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que :

- $\lambda(\mathbb{R} \setminus E_a(g)) = 0$, c'est-à-dire $E_a(g)$ est de mesure pleine.
- Pour tout $x \in E_a(g)$, $\#\{k \in \mathbb{Z} \mid g(x + ak) \neq 0\} < \infty$.

Preuve :

> Notons $S := S(g)$. Considérons pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ la fonction $\phi_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\phi_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \mathbb{1}_S(x + ak)$.
> Cette suite tend ponctuellement en croissant vers $\phi : x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_S(x+ak) = \#\{k \in \mathbb{Z} \mid g(x+ak) \neq 0\}$.
> Montrons alors que ϕ est finie presque partout.

$$\begin{aligned}\int_0^a \phi(x)dx &\underbrace{=}_{\text{CVM}} \sum_{k=\infty}^{+\infty} \int_0^a \mathbb{1}_S(x+ak)dx \\ &= \sum_{k=\infty}^{+\infty} \int_{ak}^{a(k+1)} \mathbb{1}_S(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_S(y)dy \\ &= \lambda(S) < \infty\end{aligned}$$

En particulier, ϕ est finie p.p. sur $[0,a]$. Or, ϕ est a-périodique (ce qui peut se montrer par changement d'indice dans les ϕ_N) donc ϕ est finie presque partout ce qui démontre le lemme en notant $E_a(g) = \phi^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

□

Fixons alors $\xi \in \mathbb{R}$
Ce lemme nous permet de considérer la fonction (bien définie puisque la somme est finie par le lemme) suivante :

$$\psi : x \mapsto \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi k)e^{-i\xi(x+2\pi k)} & \text{si } x \in E_{2\pi}(f) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme ϕ précédemment, ψ est 2π périodique.

Nous allons montrer que ψ est en fait égale presque partout à un polynôme trigonométrique (pour presque tout ξ en fait) mais qu'elle a un ensemble de zéros de mesure non nulle dans $[0,2\pi]$ ce qui impliquera qu'elle est nulle. Les valeurs de ses coefficients de Fourier nous permettrons de conclure que $\widehat{f}$ est nulle et donc f également.

Montrons que ψ est intégrable sur $[0,2\pi]$ Pour cela, on utilise le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x+2\pi k)e^{-i\xi(x+2\pi k)}|dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |f(x+2k\pi)|dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y)dy = \|f\|_1 < \infty$$

D'après le théorème de Fubini, on a bien ψ intégrable sur $[0,2\pi]$.

Calculons ses coefficients de Fourier Soit $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}c_n(\psi) = \int_0^{2\pi} \psi(x)e^{-inx}dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x+2\pi k)e^{-i\xi(x+2\pi k)}e^{-inx}dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y)e^{-i\xi y}e^{-in(y-2k\pi)}dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y)e^{-iy(\xi+n)} \underbrace{e^{i2\pi nk}}_{=1} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy(\xi+n)}dy \\ &= \widehat{f}(\xi+n)\end{aligned}$$

La première égalité provient à nouveau d'un théorème de Fubini exactement comme pour l'intégrabilité (on a juste multiplié par un complexe de module 1 qui ne change rien au module).
Si on choisit $\xi \in E_1(\widehat{f})$, on a que $\#\{n \in \mathbb{Z} \mid c_n(\psi) \neq 0\} < \infty$ donc ψ est égale presque partout à un polynôme trigonométrique qu'on notera P.

Note: *On utilise ici le théorème ci-dessous, il faut être au clair dessus mais ne pas le démontrer le jour J je pense.*

Théorème 1.2.2:

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ telles que $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = c_n(g)$. Alors, $f = g$ presque partout. Autrement dit,

$$\begin{aligned}\Gamma : L^1(\mathbb{R}) &\to \mathbb{C}^Z Z \\ f &\mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

est injective.

Preuve :

Puisque Γ est linéaire, il suffit de montrer que sont noyau est réduit à la fonction nulle.

On considère le noyau de Féjer $(F_N)_N = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n\right)_N$ où $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{in\cdot}$ désigne le noyau de dirichlet.
On rappelle que K_N est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{T})$ et que $K_N * f$ est la N-ième somme de césaro de la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f. Pour des rappels sur les noyau de Dirichlet et Féjer, on pourra consulter la partie "Noyaux trigonométriques" de "Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels"(El Amrani [2, 2008]).

Soit $f \in \ker\Gamma$. Alors, toutes les sommes partielles de la série de Fourier de f sont nulles donc pour tout $N \in \mathbb{N},\ K_N * f = 0$ presque partout. Par conséquent, $\|f\|_1 = \|f - K_N * f\|_1 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ donc $f = 0$ presque partout.
□

ψ a ses zéros de mesure non nulle On a l'inclusion suivante

$$\{x \in [0,2\pi] \mid \psi(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{x \in [0,2\pi] \mid f(x+2k\pi) \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{y \in [2k\pi, 2(k+1)\pi] \mid f(y) \neq 0\} = S(f)$$

Il suit que $\lambda(\{x \in [0,2\pi] \mid \psi(x) = 0\}) \geq 2\pi - \lambda(S(f))$.
Or, quitte à composer f à droite par une dilatation, on peut supposer que $\lambda(S(f)) \in]0, 2\pi[$ donc $\lambda(\{x \in [0,2\pi] \mid \psi(x) = 0\}) > 0$.

Note: *Je ne pense pas qu'il faille donner plus de détails que cela lors de l'oral. Je donne ci-dessous l'argument détaillé.*
Preuve :

Le cas $\lambda(S(f)) = 0$ est trivial.

Soit un réel $u > 0$ et notons $f_u : x \mapsto f(ux)$. Alors, $\widehat{f_u} = \frac{1}{u}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{u}\right)$ donc $S(\widehat{f_u}) < \infty$. De plus, $f = 0 \iff f_u = 0$. Il suffit donc de voir qu'on peut choisir u tel que $\lambda(S(f_u)) \in]0, 2\pi[$. Or,

$$\lambda(S(f_u)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{S(f_u)}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{S(f)}(ux)dx = \frac{1}{u}\int_R R\mathbb{1}_{S(f)}(y)dy = \frac{\lambda(S(f))}{u}$$

Choisissant $u > \frac{\lambda_A}{2\pi}$ on a bien le résultat

□

ψ est nulle On a donc ψ égale presque partout à un polynôme trigonométrique et avec ses zéros de mesure non nulle. On en déduis $\psi = 0$ en utilisant le lemme suivant :
Note: *Ne pas démontrer cela le jour J je pense.*

Lemme 1.2.3:

Soit $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ un polynôme trigonométrique non nul et $Z(P) := \{x \in [0,2\pi] \mid P(x) = 0\}$. Alors, $\lambda(Z(P)) = 0$.

Preuve :

On a

$$P(x) = e^{-iNx} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i(n+N)x} = e^{-iNx} \sum_{k=-N}^{N} a_{k-N} e^{ikx} = e^{-iNx} Q(e^{ix})$$

où $Q = \sum_{k=-N}^{N} a_{k-N} X^k \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$.
On a donc $P(x) = 0 \iff Q(e^{ix}) = 0$.
Notons $Q = \{z_1, \dots, z_{2N+1}\} = \{\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_{2N} e^{i\theta_{2N}}\}$ l'ensemble des racines complexes de Q. Alors,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} = z_i\} = \begin{cases} \theta_i + 2\pi\mathbb{Z} & \text{si } \rho_i = 1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}.$$

Finalement, $Z(P) \subset \bigcup_{i=1}^{2N} \theta_i + 2\pi\mathbb{Z}$ de mesure nulle car dénombrable.

□

Conclusion sur f Puisque $\psi = 0$, ses coefficients de Fourier sont tous nuls et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(\xi + n) = 0$. Puisque ceci est vrai pour tout $\xi \in E_1(\widehat{f})$ de mesure pleine, on en déduis que $\widehat{f} = 0$ puis que $f = 0$ par injectivité de la TF.

Pourquoi "principe d'incertitude" Vous avez probablement déja entendu parler du principe d'incertitude de Heisenberg :
Notons, pour $f \in L^2$ telle que $\|f\|_1 = 1$, $\sigma(f) = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx$. Notons $\widetilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}$ de sorte que, par Plancherel, $\|\widetilde{f}\|_2 = \|f\|_2 = 1$. Alors,

$$\sigma(f)\sigma(\widetilde{f}) > C$$

où C est une constante strictement positive ne dépendant pas de f.

Essentiellement, celui-ci dit qu'on ne peut pas localiser un signal fortement à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel.

Le résultat que l'on démontre ici donne une information similaire : si $f \neq 0$ est non nulle sur un ensemble de mesure finie (donc localisée en un certain sens), alors sa tranformée de Fourier ne peux pas l'être.

Attention : localisé ne veut pas ici dire concentré. Par exemple, notons $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [k, k + \frac{1}{2^n}$ et $f = \mathbb{1}_B$. Alors, $\lambda_B < \infty$ mais f prend des valeurs non nulle pour des x arbitrairement grands.

Références

[1] Gérard Bernis et Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : Oral*. 2e. Paris : Vuibert, 2003.

[2] Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Cours et exercices*. Paris : Ellipses, 2008.