1 Théorème de Riesz-Fischer (complétude de L^p)

1.1 Commentaires et références

Ce développement consiste à démontrer le théorème de Riesz-Fischer dans le cas $1 \leq p < \infty$:

Théorème 1.1.1:

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Alors, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Commentaires Le cas $p = \infty$ est également vrai mais la preuve faite ici ne s'y adapte absolument pas. Il faut cependant savoir le citer et avoir une idée de la preuve de ce cas. Il faut aussi avoir une idée de conséquences de ce résultat, notamment que L^2 est un espace de Hilbert (et à quoi ca sert).
Ce développement n'est pas très difficile (pas facile non plus) en tant que tel mais il y a quelques subtilités auxquelles il faut faire attention pour ne pas se faire piéger le jour J.
Note: *J'ai mis des notes comme celle-ci dans le document pour préciser certains points qui ne doivent selon moi pas être explicités à l'oral le jour J par soucis de temps.*

Références La référence que j'ai utilisée est "Théorie de l'intégration"(Briane et Pagès [1]). La preuve y est bien faite, je ne crois pas qu'il y ait d'erreurs. Certains passages sont un peu rapides, je les détailles ici.

Recasages Selon moi, ce développement se recase bien dans les leçons :

205 : Espaces complets. Exemples et applications

234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Même s'il y en assez peu, c'est une une preuve qu'il est je pense intéressant de connaitre (par exemple dès que l'on parle de L^2 comme d'un espace de Hilbert quelque part, il faut avoir une idée de pourquoi celui-ci est complet).

1.2 Développement

Dans ce qui suit, on se donne $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$ un réel.

On commence par démontrer un lemme :

Lemme 1.2.1: *Minkowski généralisé*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une suite de fonctions mesurables. Alors, $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p$.

Note:

- *On peux admettre ce lemme (et le montrer a la fin s'il y a le temps) pour la leçon de complétude.*
- *Tout les objets sont bien définis (même si potentiellement égaux à $+\infty$) puisque les f_n sont positives*

Preuve :

Fixons $N \in \mathbb{N}$ et considérons la norme de la somme partielle. L'inégalité de Minkowski, suivie de la majoration d'une somme partielle de série à termes positifs par la somme de la série, donne :

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p$$

Il suffit de passer à la limite $N \to \infty$ dans le membre de gauche pour obtenir le résultat. Or,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} f_n \right)^p \xrightarrow[N\to\infty]{} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)^p$$

Le théorème de convergence monotone donne alors la convergence :

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)^p \mathrm{d}\mu \nearrow_{N\to\infty} \int_X \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)^p \mathrm{d}\mu$$

et a fortiori :

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} f_n\right\|_p \xrightarrow[N\to\infty]{} \left\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right\|_p$$

□

On va utiliser la caractérisation suivante de la complétude :

Théorème 1.2.2:

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach (c'est-à-dire complet) si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Note:

On peux admettre ce théorème dans la lecon de fonctions intégrables et le démontrer (au moins partiellement) à la fin s'il reste du temps.

Preuve :

Supposons que E est complet Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$. Notons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la somme partielle jusqu'au rang N : $S_N := \sum_{n=0}^{N} u_n$.
Soient deux entiers $N \geq M \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|S_N - S_M\| &= \left\|\sum_{n=M+1}^{N} u_n\right\| \\
&\leq \sum_{n=M+1}^{N} \|u_n\| && \text{Par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \|u_n\| && \text{Car somme de terme positifs} \\
&\xrightarrow[M\to\infty]{} 0 && \text{Car reste de série convergente à terme positifs}
\end{aligned}$$

donc la suite des sommes partielles est de Cauchy et donc converge (E est complet par hypothèse).
Supposons que les séries normalement convergentes sont convergentes Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Il suffit de montrer que celle-ci admet une sous suite convergente (voir dernière phrase de la preuve et note juste ensuite). On peut contruire inductivement une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante par :

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi(n+1) = \min\{k > \phi(n) \mid \forall l \geq k, \|u_l - u_k\| < 2^{-n}\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On définit alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E par

$$\begin{cases} x_0 = u_{\phi(0)} = u_0 \\ x_n = u_{\phi(n)} - u_{\phi(n-1)} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

de sorte que : $u_{\phi(n)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$ et pour tout $k \geq 1$, $\|x_k\| < 2^{-(k-1)}$.
En particulier, $(u_{\phi(n)})$ est la suite des sommes partielles de la série normalement conrgente $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\right)$ et converge donc.
Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy possédant une sous suite convergente donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et E est complet.

□

Note: *Je déconseille de prouver cette dernière affirmation pendant le passage au tableau, cependant il faut savoir le justifier. En voici une preuve :*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique (E,d) et $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une extractrice telle que $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in E$. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

Fixons $\epsilon > 0$. Alors, vu nos hypothèses,

$$\begin{aligned} &\exists N_1,\ \forall n,m \geq N_1,\ d(u_n,u_m) < \epsilon/2 && (u_n) \text{ est de Cauchy} \\ &\exists N_2,\ \forall n \geq N_2,\ d(u_{\phi(n)},l) < \epsilon/2 && (u_{\phi(n)}) \text{ converge vers } l \end{aligned}$$

Posons alors $N = \max\{N_1,N_2\}$ et remarquons que $\forall n \geq N, \phi(n) \geq n \geq N \geq N_1$ donc

$$d(u_n,l) \leq d(u_n,u_{\phi(n)}) + d(u_{\phi(n)},l) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \leq \epsilon$$

c'est-à-dire $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

On peux maintenant passer à la preuve du théorème de Riesz-Fischer. Pour cela, on se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_p < \infty$. Montrons qu'alors la série de terme général (u_n) converge.

Utilisant le Lemme 1.2.1, on obtient

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_p < \infty$$

En particulier, pour presque tout $x \in X$, $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| < \infty$. C'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(X \setminus C) = 0$ et $\forall x \in C,\ \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| < \infty$.

Note: *Il faut savoir justifier cela mais je ne pense pas qu'il soit nécessaire de le detailler pendant l'oral. En voici une preuve.*
On considère $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive telle que $\|f\|_p < \infty$. Quitte à remplacer f par f^p on suppose que $p = 1$ (simplifie les notations).
Alors, $C := \{f < +\infty\} \in \mathcal{A}$ car f est mesurable. De plus,

$$\mu(X \setminus C) = \mu(\{f = \infty\}) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\downarrow} \{f \geq n\} \right)$$

Or, l'inégalité de Markov donne $\{f \geq n\} \leq \frac{1}{n}\ \|f\|_1$. En particulier, $\mu(\{f \geq 1\} \leq \|f\|_1 < \infty$ et

$$\mu(X \setminus C) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{f \geq n\}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_1}{n} = 0$$

En particulier, pour tout $x \in C$, $\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)$ converge.

Note: *Ici, deux justification sont possibles. Soit invoquer le Théorème 1.2.2 en utilisant que $(\mathbb{K},\mu)$ est complet, soit invoquer le résultat bien connu que les séries absolument convergentes sur $\mathbb{K}$ sont convergentes (dont il faut connaitre la preuve, celle-ci étant identique à celle du sens directe du Théorème 1.2.2).*

On définit alors une application $U : X \to \mathbb{K}$, candidate pour être la somme de notre série, par :

$$\forall x \in X,\ U(x) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Note: *La valeure assignée hors de C n'a aucune importance.*
Alors, pour tout $x \in C$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| U(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Note: *Il faut savoir justifier cette dernière inégalitée. On peut procéder comme dans le Lemme 1.2.1 en passant a la limite par continuité du module plutôt que par CVM.*

Passant à la norme et utilisant le fait que le complémentaire de C est de mesure nulle (et donc ignoré par l'intégrale), on obtient :

$$\left\| U - \sum_{n=0}^{N} u_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \right\|_p \leq \sum_{n=N+1} \|u_n\|_p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \text{car reste de série convergente}$$

La dernière inégalité vient du Lemme 1.2.1. Ceci donne bien la convergence (vers U) dans L^p de la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ et donc d'après le Théorème 1.2.2 on obtient que $(L^p, \|\cdot\|)$ est complet.

Références

[1] Briane et Pagès. *Théorie de l'intégration*. 4e éd.