1 Théorème de Mashcke

1.1 Commentaires et références

Ce développement consiste à démontrer le théorème de Mashcke
On énonce une définition commode :

Définition 1.1.1:

Soit G un sous-groupe de $GL(E)$ où E est un K-espace vectoriel. Soit W un sous-espace de E stable par G. On dit que W est G-irréductible s'il est non nul et n'admet pas de sous espaces stables par G en dehors de $\{0\}$ et W.

Théorème 1.1.2:

Soit G un sous-groupe de $GL(E)$ où E est un K-e.v. de dimension finie d avec $car(K) \nmid |G|$. Alors, $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ où V_k est G-irréductible.
En d'autre terme, toute représentation d'un groupe fini est somme de sous-représentations irréductibles.

Commentaires Ce développement est assez simple dans son contenu, il y a assez peu d'idée à se souvenir pour pouvoir le ressortir et les calculs sont simples. Attention cependant le théorème de Mashcke que l'on démontre ici est en fait un théorème sur les représentations de groupes finis donc il faut s'attendre à des questions qui gravitent dans cette directoin même si le mot *représentations* n'est pas prononcé. En vrac, j'ai eu lors de mon passage en classe on m'a fait dire que les éléments d'un sous-groupe de $GL(\mathbb{C}^n)$ sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont des racines de l'unité.

Références J'ai utilisé **berhuy˙algebre˙nodate**. Presque tous les détails y sont, cependant le langage est celui des représentations donc il faut le traduire pour les retirer si on ne souhaite pas en parler explicitement (en introduisant par exemple la notions de sous-espaces G-irréductibles comme je l'ai fait). Je ne sais pas s'il existe un livre où le théorème est énoncé indépendamment de la théorie des représentations.

Recasages Selon moi, ce développement se recase bien dans les leçons :
151 : Sous-espaces stables
On peut éventuellement le recaser dans bases et dimensions mais c'est quand même abusif (la récurrence sur la dimensions n'est pas le coeur de la preuve).

1.2 Développement

Dans ce qui suit, on fixe un K espace vectoriel E et G un sous-groupe fini de $GL(E)$ tel que $car(K) \nmid |G|$.

On démontre d'abord le lemme suivant :

Lemme 1.2.1:

Soit $W \subset E$ un sous-espace stable par G. Alors, il existe un supplémentaire de W stable par G

La théorème découlera alors d'une réccurence sur la dimension de E.
Preuve :

On va construire $\phi : E \to E$ un projecteur sur W tel que $\forall \gamma \in G,\ \phi \circ \gamma = \gamma \circ \phi$.

Soit W' un supplémentaire de W et π_W le projecteur sur W le long de W'.
Note: *On rappelle que pour tout espace vectoriel A et tout sous espace vectoriel $B \subset A$, il existe un supplémentaire C de B dans A.*
Posons $\phi : E \to E$ défini par

$$\phi = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in G} \rho \circ \pi_W \circ \rho^{-1}$$

Montrons que $\phi(E) = W$ Soit $x \in E$ et $\rho \in G$, alors $\pi_W \circ \rho^{-1}(x) \in W$ par définition de π_W. Or, W est stable par G donc $\rho \circ \pi_W \circ \rho^{-1}(x) \in W$. Il suit que $\phi(E) \subset W$.

Soit alors $w \in W$. Puisque W est stable par G, pour tout $\rho \in G$, $\rho^{-1}(w) \in W$ et $\pi_W \circ \rho^{-1}(w) = \rho^{-1}(w)$. A fortiori, $\phi(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in G} \rho \circ \rho^{-1}(w) = w$ donc $\phi(W) = W$.

Montrons que ϕ est un projecteur On a en fait vu que $\phi_W = \mathrm{id}_W$ donc $\phi^2 = \phi$ et ϕ est le projecteur sur W le long de $V = \ker\phi$. En particulier, $E = V \oplus W$

Montrons que pour tout $\gamma \in G$, $\gamma \circ \phi = \phi \circ \gamma$ Soit $\gamma \in G$,

$$\begin{aligned}
\phi \circ \gamma &= \frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in G} \rho \circ \pi_W \circ \rho^{-1} \circ \gamma \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in G} \rho \circ \pi_W \circ (\gamma^{-1} \circ \rho)^{-1} \\
&= \gamma \circ \left(\frac{1}{|G|}\sum_{\rho\in G} \gamma^{-1} \circ \rho \circ \pi_W \circ (\gamma^{-1} \circ \rho)^{-1} \right) \\
&= \gamma \circ \phi
\end{aligned}$$

Note: *On utilise ici que la multiplication à gauche par un élément de G est une bijection de G vers lui-même.*
En particulier, $V = \ker\phi$ est stable par G et le lemme est démontré.
□

On démontre maintenant le théorème par récurrence sur la dimension.

Si E est un espace vectoriel de dimension 1, il est clairement G-irréductible puisque son seul sous-espace vectoriel non trivial est E lui-même.

Fixons $d \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout espace vectoriel de dimension $\leq d$ et tout sous-groupe fini G tel que $car(K) \nmid |G|$, le résultat soit vrai.
Soit E de dimension $d+1$ et G un sous-groupe de $GL(E)$.

Si E est G-irréductible il n'y a rien à faire.

Si $\{0\} \subsetneq W \subsetneq E$ est un sous-espace stable par G Le lemme donne l'existence de V stable par G tel que $E = V \oplus W$. De plus, V et W sont de dimensions plus petite ou égales à d.

Considérons, pour $U \in \{V, W\}$, $G_U = \{\rho_U \mid \rho \in G\}$. Alors, G_U est un sous-groupe fini de $GL(U)$. De plus, son cardinal n'est pas divisible par la charactéristique de K car il divise le cardinal de G. A fortioti, l'hypothèse de récurrence s'applique.
Note: *Attention, il faut savoir justifier que $\#G_U | \#G$. Ceci découle simplement du fait que $\rho \mapsto \rho_W$ est un morphisme de groupe surjectif. Le théorème d'isomorphisme conlut alors.*
Celle-ci nous donne $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ et $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ des décompositions en sous-espaces G_W-irréductibles et G_V-irréductibles respectivements.

Montrons finalement que $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ est une décomposition en sous-espaces G-irréductibles. Ceci découle immédiatement du fait que pour tout $\rho \in G$, $\rho_{|W_i}(W) = \iota_i \circ \rho_W(W)$ où $\iota_i : W_i \hookrightarrow E$ est l'inclusion canonique.