1 Théorème de Riesz-Fischer (complétude de L^p)

1.1 Commentaires et références

Ce développement consiste à démontrer le théorème de Riesz-Fischer dans le cas $1 \leq p < \infty$:

Théorème 1.1.1:

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Alors, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Commentaires Le cas $p = \infty$ est également vrai mais la preuve faite ici ne s'y adapte absolument pas. Il faut cependant savoir le citer et avoir une idée de la preuve de ce cas. Il faut aussi avoir une idée de conséquences de ce résultat, notamment que L^2 est un espace de Hilbert (et à quoi ca sert).
Ce développement n'est pas très difficile (pas facile non plus) en tant que tel mais il y a quelques subtilités auxquelles il faut faire attention pour ne pas se faire piéger le jour J.
Note: *J'ai mis des notes comme celle-ci dans le document pour préciser certains points qui ne doivent selon moi pas être explicités à l'oral le jour J par soucis de temps.*

Références La référence que j'ai utilisée est "Théorie de l'intégration"(Briane et Pagès [2]). La preuve y est bien faite, je ne crois pas qu'il y ait d'erreurs. Certains passages sont un peu rapides, je les détailles ici.

Recasages Selon moi, ce développement se recase bien dans les leçons :

205 : Espaces complets. Exemples et applications

234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Même s'il y en assez peu, c'est une une preuve qu'il est je pense intéressant de connaitre (par exemple dès que l'on parle de L^2 comme d'un espace de Hilbert quelque part, il faut avoir une idée de pourquoi celui-ci est complet).

1.2 Développement

Dans ce qui suit, on se donne $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$ un réel.

On commence par démontrer un lemme :

Lemme 1.2.1: *Minkowski généralisé*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une suite de fonctions mesurables. Alors, $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p$.

Note:

- *On peux admettre ce lemme (et le montrer a la fin s'il y a le temps) pour la leçon de complétude.*
- *Tout les objets sont bien définis (même si potentiellement égaux à $+\infty$) puisque les f_n sont positives*

Preuve :

Fixons $N \in \mathbb{N}$ et considérons la norme de la somme partielle. L'inégalité de Minkowski, suivie de la majoration d'une somme partielle de série à termes positifs par la somme de la série, donne :

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p$$

Il suffit de passer à la limite $N \to \infty$ dans le membre de gauche pour obtenir le résultat. Or,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} f_n \right)^p \xrightarrow[N\to\infty]{} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)^p$$

Le théorème de convergence monotone donne alors la convergence :

$$\int_X \left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)^p \mathrm{d}\mu \nearrow_{N\to\infty} \int_X \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)^p \mathrm{d}\mu$$

et a fortiori :

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} f_n\right\|_p \xrightarrow[N\to\infty]{} \left\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right\|_p$$

□

On va utiliser la caractérisation suivante de la complétude :

Théorème 1.2.2:

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach (c'est-à-dire complet) si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Note:

On peux admettre ce théorème dans la lecon de fonctions intégrables et le démontrer (au moins partiellement) à la fin s'il reste du temps.

Preuve :

Supposons que E est complet Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty$. Notons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la somme partielle jusqu'au rang N : $S_N := \sum_{n=0}^{N} u_n$.
Soient deux entiers $N \geq M \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|S_N - S_M\| &= \left\|\sum_{n=M+1}^{N} u_n\right\| \\
&\leq \sum_{n=M+1}^{N} \|u_n\| && \text{Par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{n=M+1}^{\infty} \|u_n\| && \text{Car somme de terme positifs} \\
&\xrightarrow[M\to\infty]{} 0 && \text{Car reste de série convergente à terme positifs}
\end{aligned}$$

donc la suite des sommes partielles est de Cauchy et donc converge (E est complet par hypothèse).
Supposons que les séries normalement convergentes sont convergentes Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Il suffit de montrer que celle-ci admet une sous suite convergente (voir dernière phrase de la preuve et note juste ensuite). On peut contruire inductivement une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante par :

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi(n+1) = \min\{k > \phi(n) \mid \forall l \geq k, \|u_l - u_k\| < 2^{-n}\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On définit alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E par

$$\begin{cases} x_0 = u_{\phi(0)} = u_0 \\ x_n = u_{\phi(n)} - u_{\phi(n-1)} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

de sorte que : $u_{\phi(n)} = \sum_{k=0}^{n} x_k$ et pour tout $k \geq 1$, $\|x_k\| < 2^{-(k-1)}$.
En particulier, $(u_{\phi(n)})$ est la suite des sommes partielles de la série normalement conrgente $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\right)$ et converge donc.
Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy possédant une sous suite convergente donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et E est complet.

□

Note: *Je déconseille de prouver cette dernière affirmation pendant le passage au tableau, cependant il faut savoir le justifier. En voici une preuve :*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique (E,d) et $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une extractrice telle que $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in E$. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

Fixons $\epsilon > 0$. Alors, vu nos hypothèses,

$$\begin{aligned} &\exists N_1,\ \forall n,m \geq N_1,\ d(u_n,u_m) < \epsilon/2 && (u_n) \text{ est de Cauchy} \\ &\exists N_2,\ \forall n \geq N_2,\ d(u_{\phi(n)},l) < \epsilon/2 && (u_{\phi(n)}) \text{ converge vers } l \end{aligned}$$

Posons alors $N = \max\{N_1,N_2\}$ et remarquons que $\forall n \geq N, \phi(n) \geq n \geq N \geq N_1$ donc

$$d(u_n,l) \leq d(u_n,u_{\phi(n)}) + d(u_{\phi(n)},l) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \leq \epsilon$$

c'est-à-dire $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$

On peux maintenant passer à la preuve du théorème de Riesz-Fischer. Pour cela, on se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_p < \infty$. Montrons qu'alors la série de terme général (u_n) converge.

Utilisant le Lemme 1.2.1, on obtient

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_p < \infty$$

En particulier, pour presque tout $x \in X$, $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| < \infty$. C'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(X \setminus C) = 0$ et $\forall x \in C,\ \sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| < \infty$.

Note: *Il faut savoir justifier cela mais je ne pense pas qu'il soit nécessaire de le detailler pendant l'oral. En voici une preuve.*
On considère $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive telle que $\|f\|_p < \infty$. Quitte à remplacer f par f^p on suppose que $p = 1$ (simplifie les notations).
Alors, $C := \{f < +\infty\} \in \mathcal{A}$ car f est mesurable. De plus,

$$\mu(X \setminus C) = \mu(\{f = \infty\}) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\downarrow} \{f \geq n\} \right)$$

Or, l'inégalité de Markov donne $\{f \geq n\} \leq \frac{1}{n}\ \|f\|_1$. En particulier, $\mu(\{f \geq 1\} \leq \|f\|_1 < \infty$ et

$$\mu(X \setminus C) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{f \geq n\}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\|f\|_1}{n} = 0$$

En particulier, pour tout $x \in C$, $\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right)$ converge.

Note: *Ici, deux justification sont possibles. Soit invoquer le Théorème 1.2.2 en utilisant que $(\mathbb{K},\mu)$ est complet, soit invoquer le résultat bien connu que les séries absolument convergentes sur $\mathbb{K}$ sont convergentes (dont il faut connaitre la preuve, celle-ci étant identique à celle du sens directe du Théorème 1.2.2).*

On définit alors une application $U : X \to \mathbb{K}$, candidate pour être la somme de notre série, par :

$$\forall x \in X,\ U(x) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Note: *La valeure assignée hors de C n'a aucune importance.*
Alors, pour tout $x \in C$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| U(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(x)|$$

Note: *Il faut savoir justifier cette dernière inégalitée. On peut procéder comme dans le Lemme 1.2.1 en passant a la limite par continuité du module plutôt que par CVM.*

Passant à la norme et utilisant le fait que le complémentaire de C est de mesure nulle (et donc ignoré par l'intégrale), on obtient :

$$\left\| U - \sum_{n=0}^{N} u_n \right\|_p \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \right\|_p \leq \sum_{n=N+1} \|u_n\|_p \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \text{car reste de série convergente}$$

La dernière inégalité vient du Lemme 1.2.1. Ceci donne bien la convergence (vers U) dans L^p de la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ et donc d'après le Théorème 1.2.2 on obtient que $(L^p, \|\cdot\|)$ est complet.

2 Théorème de Mashcke

2.1 Commentaires et références

Ce développement consiste à démontrer le théorème de Mashcke
On énonce une définition commode :

Définition 2.1.1:

Soit G un sous-groupe de $GL(E)$ où E est un K-espace vectoriel. Soit W un sous-espace de E stable par G. On dit que W est G-irréductible s'il est non nul et n'admet pas de sous espaces stables par G en dehors de $\{0\}$ et W.

Théorème 2.1.2:

Soit G un sous-groupe de $GL(E)$ où E est un K-e.v. de dimension finie d avec $car(K) \nmid |G|$. Alors, $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ où V_k est G-irréductible.
En d'autre terme, toute représentation d'un groupe fini est somme de sous-représentations irréductibles.

Commentaires Ce développement est assez simple dans son contenu, il y a assez peu d'idée à se souvenir pour pouvoir le ressortir et les calculs sont simples. Attention cependant le théorème de Mashcke que l'on démontre ici est en fait un théorème sur les représentations de groupes finis donc il faut s'attendre à des questions qui gravitent dans cette directoin même si le mot *représentations* n'est pas prononcé. En vrac, j'ai eu lors de mon passage en classe on m'a fait dire que les éléments d'un sous-groupe de $GL(\mathbb{C}^n)$ sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont des racines de l'unité.

Références J'ai utilisé **berhuy˙algebre˙nodate**. Presque tous les détails y sont, cependant le langage est celui des représentations donc il faut le traduire pour les retirer si on ne souhaite pas en parler explicitement (en introduisant par exemple la notions de sous-espaces G-irréductibles comme je l'ai fait). Je ne sais pas s'il existe un livre où le théorème est énoncé indépendamment de la théorie des représentations.

Recasages Selon moi, ce développement se recase bien dans les leçons :

151 : Sous-espaces stables

On peut éventuellement le recaser dans bases et dimensions mais c'est quand même abusif (la récurrence sur la dimensions n'est pas le coeur de la preuve).

2.2 Développement

Dans ce qui suit, on fixe un K espace vectoriel E et G un sous-groupe fini de $GL(E)$ tel que $car(K) \nmid |G|$.

On démontre d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.2.1:

Soit $W \subset E$ un sous-espace stable par G. Alors, il existe un supplémentaire de W stable par G

La théorème découlera alors d'une réccurence sur la dimension de E.

Preuve :

On va construire $\phi : E \to E$ un projecteur sur W tel que $\forall \gamma \in G,\ \phi \circ \gamma = \gamma \circ \phi$.

Soit W' un supplémentaire de W et π_W le projecteur sur W le long de W'.
Note: *On rappelle que pour tout espace vectoriel A et tout sous espace vectoriel $B \subset A$, il existe un supplémentaire C de B dans A.*
Posons $\phi : E \to E$ défini par

$$\phi = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in G} \rho \circ \pi_W \circ \rho^{-1}$$

Montrons que $\phi(E) = W$ Soit $x \in E$ et $\rho \in G$, alors $\pi_W \circ \rho^{-1}(x) \in W$ par définition de π_W. Or, W est stable par G donc $\rho \circ \pi_W \circ \rho^{-1}(x) \in W$. Il suit que $\phi(E) \subset W$.

Soit alors $w \in W$. Puisque W est stable par G, pour tout $\rho \in G$, $\rho^{-1}(w) \in W$ et $\pi_W \circ \rho^{-1}(w) = \rho^{-1}(w)$. A fortiori, $\phi(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in G} \rho \circ \rho^{-1}(w) = w$ donc $\phi(W) = W$.

Montrons que ϕ est un projecteur On a en fait vu que $\phi_W = \mathrm{id}_W$ donc $\phi^2 = \phi$ et ϕ est le projecteur sur W le long de $V = \ker \phi$. En particulier, $E = V \oplus W$

Montrons que pour tout $\gamma \in G$, $\gamma \circ \phi = \phi \circ \gamma$ Soit $\gamma \in G$,

$$\begin{aligned}
\phi \circ \gamma &= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in G} \rho \circ \pi_W \circ \rho^{-1} \circ \gamma \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in G} \rho \circ \pi_W \circ (\gamma^{-1} \circ \rho)^{-1} \\
&= \gamma \circ \left(\frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in G} \gamma^{-1} \circ \rho \circ \pi_W \circ (\gamma^{-1} \circ \rho)^{-1} \right) \\
&= \gamma \circ \phi
\end{aligned}$$

Note: *On utilise ici que la multiplication à gauche par un élément de G est une bijection de G vers lui-même.*
En particulier, $V = \ker \phi$ est stable par G et le lemme est démontré.
□

On démontre maintenant le théorème par récurrence sur la dimension.

Si E est un espace vectoriel de dimension 1, il est clairement G-irréductible puisque son seul sous-espace vectoriel non trivial est E lui-même.

Fixons $d \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout espace vectoriel de dimension $\leq d$ et tout sous-groupe fini G tel que $car(K) \nmid |G|$, le résultat soit vrai.
Soit E de dimension $d+1$ et G un sous-groupe de $GL(E)$.

Si E est G-irréductible il n'y a rien à faire.

Si $\{0\} \subsetneq W \subsetneq E$ est un sous-espace stable par G Le lemme donne l'existence de V stable par G tel que $E = V \oplus W$. De plus, V et W sont de dimensions plus petite ou égales à d.

Considérons, pour $U \in \{V, W\}$, $G_U = \{\rho_U \mid \rho \in G\}$. Alors, G_U est un sous-groupe fini de $GL(U)$. De plus, son cardinal n'est pas divisible par la charactéristique de K car il divise le cardinal de G. A fortioti, l'hypothèse de récurrence s'applique.
Note: *Attention, il faut savoir justifier que $\#G_U | \#G$. Ceci découle simplement du fait que $\rho \mapsto \rho_W$ est un morphisme de groupe surjectif. Le théorème d'isomorphisme conlut alors.*

Celle-ci nous donne $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ et $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ des décompositions en sous-espaces G_W-irréductibles et G_V-irréductibles respectivements.

Montrons finalement que $E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ est une décomposition en sous-espaces G-irréductibles. Ceci découle immédiatement du fait que pour tout $\rho \in G$, $\rho_{|W_i}(W) = \iota_i \circ \rho_W(W)$ où $\iota_i : W_i \hookrightarrow E$ est l'inclusion canonique.

3 Principe d'incertitude suédois

3.1 Commentaires et références

Notation : Pour une fonction mesurable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $S(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$.
On démontre le théorème suivant :

Théorème 3.1.1:

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $S(f)$ et $S(\widehat{f})$ sont de mesure finis. Alors, f est nulle presque partout.

Remarque 3.1.2:

On prend ici la convention suivante pour la transformation de Fourier : $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx$.

Commentaires Le développement est assez technique mais pas très difficile en soit. Il ne demande pas de connaissances très poussée en théorie de Fourier, ne nécessite pas de retenir beaucoup d'idées et n'est pas trop calculatoire. Cependant, il est assez technique en pratique et demande je trouve pas mal d'entrainement.
Il a l'avantage (comme je le précise ci-dessous) de *très bien* se recaser et d'être assez amusant à démontrer je trouve.
Au delà de savoir à peu près démontrer les résultats que l'on utilise dans la preuve, il faut savoir répondre à la question "Pourquoi on parle de principe d'incertitude" si on lui donne ce nom dans le plan ou à l'oral. Je donne mon interprétation en fin de preuve.

Références La référence que j'ai utilisée est "Analyse pour l'agrégation de mathématiques : Oral" (Bernis et Bernis [1, 2003]). La preuve qui y est faite est bien détaillée et précise. Cependant, elle utilise des conventions différentes des miennes pour les séries et transformations de Fourier. Il n'est pas très dur d'y remédier en montrant un énoncé plus général au début de la preuve (cf note ci-après, la preuve est identique). Celui-ci à en plus le mérite de permettre de retomber sur ses pates facilement si on se rend compte pendant le dev qu'on s'est planté (comme moi en cours...).

Recasages Selon moi, ce développement se recase bien dans les leçons :

234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

235 : Problème d'interversions de symboles en analyse

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 : Transformation de Fourier. Exemples et applications

La source recase également dans les leçons 201 et 241 mais je trouve ces recasages peu être un peut plus abusifs.

3.2 Développement

On commence par démontrer le lemme technique suivant.
Note: *C'est ici qu'on démontre un résultat un peu plus général que la source, le paramètre introduit nous permet de jongler facilement entre les conventions.*

Lemme 3.2.1:

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\lambda(S(g)) < \infty$. Alors, pour tout réel $a > 0$, il existe $E_a(g) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que :

- $\lambda(\mathbb{R} \setminus E_a(g)) = 0$, c'est-à-dire $E_a(g)$ est de mesure pleine.
- Pour tout $x \in E_a(g)$, $\#\{k \in \mathbb{Z} \mid g(x + ak) \neq 0\} < \infty$.

Preuve :

Notons $S := S(g)$. Considérons pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ la fonction $\phi_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\phi_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \mathbb{1}_S(x+ak)$.
Cette suite tend ponctuellement en croissant vers $\phi : x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_S(x+ak) = \#\{k \in \mathbb{Z} \mid g(x+ak) \neq 0\}$.
Montrons alors que ϕ est finie presque partout.

$$\begin{aligned}\int_0^a \phi(x)dx &\underbrace{=}_{\text{CVM}} \sum_{k=\infty}^{+\infty} \int_0^a \mathbb{1}_S(x+ak)dx \\ &= \sum_{k=\infty}^{+\infty} \int_{ak}^{a(k+1)} \mathbb{1}_S(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_S(y)dy \\ &= \lambda(S) < \infty\end{aligned}$$

En particulier, ϕ est finie p.p. sur $[0,a]$. Or, ϕ est a-périodique (ce qui peut se montrer par changement d'indice dans les ϕ_N) donc ϕ est finie presque partout ce qui démontre le lemme en notant $E_a(g) = \phi^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

□

Fixons alors $\xi \in \mathbb{R}$
Ce lemme nous permet de considérer la fonction (bien définie puisque la somme est finie par le lemme) suivante :

$$\psi : x \mapsto \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi k)e^{-i\xi(x+2\pi k)} & \text{si } x \in E_{2\pi}(f) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme ϕ précédemment, ψ est 2π périodique.

Nous allons montrer que ψ est en fait égale presque partout à un polynôme trigonométrique (pour presque tout ξ en fait) mais qu'elle a un ensemble de zéros de mesure non nulle dans $[0,2\pi]$ ce qui impliquera qu'elle est nulle. Les valeurs de ses coefficients de Fourier nous permettrons de conclure que $\widehat{f}$ est nulle et donc f également.

Montrons que ψ est intégrable sur $[0,2\pi]$ Pour cela, on utilise le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x+2\pi k)e^{-i\xi(x+2\pi k)}|dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |f(x+2k\pi)|dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y)dy = \|f\|_1 < \infty$$

D'après le théorème de Fubini, on a bien ψ intégrable sur $[0,2\pi]$.

Calculons ses coefficients de Fourier Soit $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}c_n(\psi) = \int_0^{2\pi} \psi(x)e^{-inx}dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x+2\pi k)e^{-i\xi(x+2\pi k)}e^{-inx}dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y)e^{-i\xi y}e^{-in(y-2k\pi)}dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y)e^{-iy(\xi+n)} \underbrace{e^{i2\pi nk}}_{=1} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy(\xi+n)}dy \\ &= \widehat{f}(\xi+n)\end{aligned}$$

La première égalité provient à nouveau d'un théorème de Fubini exactement comme pour l'intégrabilité (on a juste multiplié par un complexe de module 1 qui ne change rien au module).

Si on choisit $\xi \in E_1(\widehat{f})$, on a que $\#\{n \in \mathbb{Z} \mid c_n(\psi) \neq 0\} < \infty$ donc ψ est égale presque partout à un polynôme trigonométrique qu'on notera P.
Note: *On utilise ici le théorème ci-dessous, il faut être au clair dessus mais ne pas le démontrer le jour J je pense.*

Théorème 3.2.2:

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ telles que $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = c_n(g)$. Alors, $f = g$ presque partout. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \Gamma : L^1(\mathbb{R}) &\to \mathbb{C}^Z Z \\ f &\mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est injective.

Preuve :

Puisque Γ est linéaire, il suffit de montrer que sont noyau est réduit à la fonction nulle.

On considère le noyau de Féjer $(F_N)_N = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n\right)_N$ où $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{in\cdot}$ désigne le noyau de dirichlet.
On rappelle que K_N est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{T})$ et que $K_N * f$ est la N-ième somme de césaro de la suite des sommes partielles de la série de Fourier de f. Pour des rappels sur les noyau de Dirichlet et Féjer, on pourra consulter la partie "Noyaux trigonométriques" de "Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels"(El Amrani [3, 2008]).

Soit $f \in \ker\Gamma$. Alors, toutes les sommes partielles de la série de Fourier de f sont nulles donc pour tout $N \in \mathbb{N},\ K_N * f = 0$ presque partout. Par conséquent, $\|f\|_1 = \|f - K_N * f\|_1 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ donc $f = 0$ presque partout.
□

ψ a ses zéros de mesure non nulle On a l'inclusion suivante

$$\{x \in [0,2\pi] \mid \psi(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{x \in [0,2\pi] \mid f(x+2k\pi) \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{y \in [2k\pi, 2(k+1)\pi] \mid f(y) \neq 0\} = S(f)$$

Il suit que $\lambda(\{x \in [0,2\pi] \mid \psi(x) = 0\}) \geq 2\pi - \lambda(S(f))$.
Or, quitte à composer f à droite par une dilatation, on peut supposer que $\lambda(S(f)) \in]0, 2\pi[$ donc $\lambda(\{x \in [0,2\pi] \mid \psi(x) = 0\}) > 0$.

Note: *Je ne pense pas qu'il faille donner plus de détails que cela lors de l'oral. Je donne ci-dessous l'argument détaillé.*
Preuve :

Le cas $\lambda(S(f)) = 0$ est trivial.
Soit un réel $u > 0$ et notons $f_u : x \mapsto f(ux)$. Alors, $\widehat{f_u} = \frac{1}{u}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{u}\right)$ donc $S(\widehat{f_u}) < \infty$. De plus, $f = 0 \iff f_u = 0$. Il suffit donc de voir qu'on peut choisir u tel que $\lambda(S(f_u)) \in]0, 2\pi[$. Or,

$$\lambda(S(f_u)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{S(f_u)}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{S(f)}(ux)dx = \frac{1}{u}\int_R R\mathbb{1}_{S(f)}(y)dy = \frac{\lambda(S(f))}{u}$$

Choisissant $u > \frac{\lambda_A}{2\pi}$ on a bien le résultat

□

ψ est nulle On a donc ψ égale presque partout à un polynôme trigonométrique et avec ses zéros de mesure non nulle. On en déduis $\psi = 0$ en utilisant le lemme suivant :
Note: *Ne pas démontrer cela le jour J je pense.*

Lemme 3.2.3:

Soit $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ un polynôme trigonométrique non nul et $Z(P) := \{x \in [0,2\pi] \mid P(x) = 0\}$. Alors, $\lambda(Z(P)) = 0$.

Preuve :

On a
$$P(x) = e^{-iNx} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i(n+N)x} = e^{-iNx} \sum_{k=-N}^{N} a_{k-N} e^{ikx} = e^{-iNx} Q(e^{ix})$$
où $Q = \sum_{k=-N}^{N} a_{k-N} X^k \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$.
On a donc $P(x) = 0 \iff Q(e^{ix}) = 0$.
Notons $Q = \{z_1, \dots, z_{2N+1}\} = \{\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_{2N} e^{i\theta_{2N}}\}$ l'ensemble des racines complexes de Q. Alors,
$$\{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} = z_i\} = \begin{cases} \theta_i + 2\pi\mathbb{Z} & \text{si } \rho_i = 1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}.$$
Finalement, $Z(P) \subset \bigcup_{i=1}^{2N} \theta_i + 2\pi\mathbb{Z}$ de mesure nulle car dénombrable.
□

Conclusion sur f Puisque $\psi = 0$, ses coefficients de Fourier sont tous nuls et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(\xi + n) = 0$. Puisque ceci est vrai pour tout $\xi \in E_1(\widehat{f})$ de mesure pleine, on en déduis que $\widehat{f} = 0$ puis que $f = 0$ par injectivité de la TF.

Pourquoi "principe d'incertitude" Vous avez probablement déja entendu parler du principe d'incertitude de Heisenberg :
Notons, pour $f \in L^2$ telle que $\|f\|_1 = 1$, $\sigma(f) = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx$. Notons $\widetilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}$ de sorte que, par Plancherel, $\|\widetilde{f}\|_2 = \|f\|_2 = 1$. Alors,
$$\sigma(f)\sigma(\widetilde{f}) > C$$
où C est une constante strictement positive ne dépendant pas de f.

Essentiellement, celui-ci dit qu'on ne peut pas localiser un signal fortement à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel.

Le résultat que l'on démontre ici donne une information similaire : si $f \neq 0$ est non nulle sur un ensemble de mesure finie (donc localisée en un certain sens), alors sa tranformée de Fourier ne peux pas l'être.

Attention : localisé ne veut pas ici dire concentré. Par exemple, notons $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [k, k + \frac{1}{2^n}$ et $f = \mathbb{1}_B$. Alors, $\lambda_B < \infty$ mais f prend des valeurs non nulle pour des x arbitrairement grands.

Références

[1] Gérard Bernis et Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : Oral*. 2e. Paris : Vuibert, 2003.

[2] Briane et Pagès. *Théorie de l'intégration*. 4e éd.

[3] Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Cours et exercices*. Paris : Ellipses, 2008.