# Leçon 250 : Transformation de Fourier. Exemples et applications

CHANVILLARD Alexandre, RANGUIS Célian

Le but de cette leçon est d'étudier, pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, l'application $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$. Notamment, il faudra se poser la question de quelles hypothèses sont nécessaires sur $f$ pour que $\widehat{f}$ soit bien définie.

## 1 Sur l'espace $L^1$ [El ]

On se donne $f \in L^1(\mathbb{R})$.

**Proposition** 1: L'application $\widehat{f}$ est bien définie et on l'appelle transformée de Fourier de $f$.

**Lemme** 2: *Riemann-Lebesgue*
Lorsque $|\xi| \to \infty$, on a $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$

**Proposition** 3: On appelle transformation de Fourier sur $L^1$ l'application bien définie de $L^1(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ qui à $f$ associe $\widehat{f}$.

**Proposition** 4: La tranformation de Fourier est une application continue

$$\mathcal{F}_1 : (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$$

**Exemple** 5: Soient $a < b$ et $g$ l'indicatrice du segment $[a, b]$. Alors, notant $c = \frac{b-a}{2}$

$$\widehat{g}(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\sin(c\xi)}{\xi}e^{-ic\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 2c & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit ici que que la tranformation de Fourier sur $L^1$ n'est pas à valeurs dans $L^1$.

**Propriétée** 6: Pour $f \in L^1$, on a les propriétés de calcul :

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, notant $f_\lambda : x \mapsto f(\lambda x)$, on a $\widehat{f_\lambda} = \dfrac{1}{|\lambda|}\widehat{f}\left(\dfrac{\xi}{\lambda}\right)$
- Pour $a \in \mathbb{R}$, notant $\tau_a f : x \mapsto f(x-a)$, on a $\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi)$. De plus, $\tau_a\widehat{f}(\xi) = \widehat{e^{ia\cdot}f}(\xi)$.

**Proposition** 7: *Formule de dualité*
Pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)du = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(v)g(v)dv$$

## 1.1 Lien avec le produit de convolution

**Proposition** 8: Pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

**Corollaire** 9: Le produit de convolution n'admet pas d'unités dans $L^1$.

DEV 1

**Proposition** 10: *[El ]* Notons, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$

$$\gamma_s : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right)$$

.

Alors, $\widehat{\gamma_s}(\xi) = \exp(-s\xi^2/2)$. En particulier, $\widehat{\gamma_s} = \sqrt{\frac{2\pi}{s}}\gamma_{s^{-1}}$.

**Théorème** 11: *[El ]* La transformation de fourier $\mathcal{F}_1$ est injective.

**Définition** 12: On notera $\overline{\mathcal{F}_1}$ l'application linéaire continue

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}_1} : (L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) &\longrightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f &\mapsto \mathcal{F}_1(f)(-\cdot) \end{aligned}$$

**Théorème** 13: *Formule d'inversion*
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1$. On a :

$$\widehat{\widehat{f}} = 2\pi f(-\cdot) \quad \lambda - p.p.$$

c'est-à-dire pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathcal{F}_1} \circ \mathcal{F}_1(f))(x)$$

.

**Application** 14: Notons $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et calculons sa TF. Notons $f = \xi \mapsto \frac{1}{2}e^{-|\xi|}$, alors $\widehat{f}(x) = \frac{1}{x^2+1} = g(x)$. Or, $g$ est intégrable donc par inverion de fourier, on a $\widehat{g}(\xi) = \pi e^{-|x|}$.

DEV 2

**Théorème** 15: *[Ber+]* Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On pose

$$A := \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) \neq 0\} \text{ et } B := \{\xi \in \mathbb{R} \mid \widehat{f}(\xi) \neq 0\}$$

Si on suppose que $\lambda(A) < +\infty$ et $\lambda(B) < +\infty$, alors $f$ est nulle $\lambda$-pp.

**Proposition** 16: Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et supposons $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$

## 1.2 Lien avec les probabilités

**Définition** 17: Soit $X$ une variable aléatoire complexe, on appelle fonction charactéristique de $X$ l'application $\phi_X : \xi \mapsto \mathbb{E}[e^{i\xi X}]$. Lorsque $X$ admet une densité $f$, il s'agit de $\widehat{f}$.

**Théorème** 18: Si $X$ et $Y$ sont des variables à densités ayant mêmes fonction charactéristiques, elles ont même lois (injectivité de $\mathcal{F}_1$).

**Théorème** 19: *Lévy*
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et $X$ une variable aléatoire.
Alors, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \iff \phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{simplement}} \phi_X$

**Application** 20: Ce théorème permet de démontrer le théorème centrale limite.

## 1.3 Lien avec la dérivation

**Proposition** 21: *TF de la dérivée*
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ telle que $\forall l \in \{1, \cdots, k\}$, $f^{(l)} \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ :

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \widehat{f}(\xi)$$

**Proposition** 22: *Dérivée de la TF*

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x^k f(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors, $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^k$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \frac{d^k}{d\xi^k}\widehat{f}(\xi) = (-i)^k \widehat{x^k f}(\xi)$$

# 2 Sur l'espace de Schwartz [El ]

**Définition** 23: Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n f(x) \xrightarrow[||x|| \to \infty]{} 0$.

**Proposition** 24:

- Soit $f$ à décroissance rapide, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$
- Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, $\widehat{f}$ est à décroissance rapide.

**Définition** 25: On appelle espace de Schwartz l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ des fonctions $C^\infty$ à décroissances rapides dont toutes les dérivées sont également à décroissances rapides. En particulier, il est stable par produit interne, dérivation et produit par un polynôme.

**Proposition** 26: L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformation de Fourier.

**Théorème** 27: La transformation de Fourier $\mathcal{F}_1$ induit un homéomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \mathcal{F}_1(f) \end{aligned}$$

Son inverse est donnée par la restriction à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de $\frac{1}{2\pi}\overline{F}_1$.

**Application** 28: *Equation de Laplace*
On cherche une solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à $u'' - u = \phi$ pour $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donnée. Le théorème précédent donne l'équivalence de cette équation à $\mathcal{F}_s(u'' - u) = \widehat{\phi}$. De plus, $\mathcal{F}_s(u'' - u) = -(1 + \xi^2)\widehat{u}$. On en déduis à nouveau par le théorème précédent que l'unique solution est $u(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_s\left(\frac{\phi}{1+\xi^2}\right)(-x)$.

# 3 Sur l'espace $L^2$ [El ]

En général, puisque $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, on ne peut pas définir de transformation de Fourier sur $L^2$ directement avec des formules intégrales. On va chercher à étendre par densité bien définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ par densité. L'ingrédient clé sera le théorème suivant.

**Théorème** 29: *Théorème de Plancherel*
Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2$.
En terme de produit scalaire, ceci se traduit par :

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$$

**Application** 30: Calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \pi$.

**Théorème** 31: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors :

- Il existe une suite $(f_n)_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers $f$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
- Pour toute telle suite, la suite $(\widehat{f_n})_n$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\widetilde{f}$, indépendante de la suite choisie.

**Définition** 32: Pour $f \in L^2$, la limite $\widetilde{f}$ définie ci-avant est appelée transformée de Fourier dans $L^2$ de $f$. On appelle transformation de Fourier dans $L^2$ l'endomorphisme

$$\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

est appelée transformation de Fourier sur $L^2$.
On définit $\overline{\mathcal{F}_2}$ de manière analogue au cas $L^1(\mathbb{R})$.

**Remarque** 33:

- Cette définition étend bien la transformation de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$ : pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{f} = \widetilde{f}$. On utilisera seulement la notation $\widehat{f}$ dans la suite.
- Par passage à la limite, on récupère les règles de calcul de la Propriétée 6 ainsi que le théorême de Plancherel qui donne alors la continuité de $\mathcal{F}_2$.

**Proposition** 34: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et notons, pour $A \geq 0$,

$$\phi_A : \xi \mapsto \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\xi}dx \quad \psi_A : x \mapsto \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

Alors, $\phi_A \xrightarrow[A\to\infty]{L^2} \widehat{f}$ et $\psi_A \xrightarrow[A\to\infty]{L^2} f$.

**Corollaire** 35: Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors presque partout $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$.

**Proposition** 36: *Formule de dualité Bis*
Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors, $\mathcal{F}_2(f)g, f\mathcal{F}_2(g) \in L^2(\mathbb{R})$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_2(f)(u)g(u)du = \int_{\mathbb{R}} f(v)\mathcal{F}_2(g)(v)dv$$

## 3.1 Lien avec le produit de convolution

**Théorème** 37: Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors on a :

$$f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}_2}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}), \text{ ainsi que}$$

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}.$$

**Remarque** 38: Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, mais on ne sait pas si $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. On ne peut donc pas, a priori, parler de $\widehat{f * g}$.

**Proposition** 39: Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\widehat{f} \cdot \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}_2}(\widehat{f} \cdot \widehat{g})$$

**Lemme** 40: L'espace vectoriel $V := \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

On tire alors de ce résultat ainsi que de la formule d'inversion $L^1$ et du théorème de Plancherel le résultat suivant :

**Théorème** 41: *Formule d'inversion*
L'application

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$
$$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_2(f)$$

est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, d'inverse $\mathcal{P}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}$.

**Application** 42: Considérons sinc : $x \mapsto \text{sinc}(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$. Puisque, sinc $\notin \backslash L^1(\mathbb{R})$, on ne peut pas calculer $\mathcal{F}_1(\text{sinc})$.
Cependant, l'Exemple 5 donne que sinc $= \mathcal{F}_1\left(\dfrac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}\right)$. Puisque $\mathbb{1}_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le théorème précédent pour obtenir $\overline{\mathcal{F}_2}(\text{sinc}) = \pi\mathbb{1}_{[-1,1]}$.

# Rapport du jury

Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : $L^1$, classe de Schwartz des fonctions $C^\infty$ à décroissance rapide, ou $L^2$. Les deux derniers cadres sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat. La leçon nécessite de rappeler le lien avec le produit de convolution. Elle doit aussi être illustrée par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Par ailleurs, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon. Proposer comme développement le théorème d'échantillonage de Shannon est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert. Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$, à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution L1pRq, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.

# Références


[Ber+] Gérard Bernis et Laurent Bernis. *Analyse pour l'agrégation de mathématiques : Oral.* 2e. Paris : Vuibert, 2003.

[El ] Mohammed El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Cours et exercices.* Paris : Ellipses, 2008.