Leçon 234 :

Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Par la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

## I- Construction de l'intégrale

**Def 1 :** Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ est dite étagée si elle est mesurable et prend un nombre fini de valeurs. On appelle forme canonique de $f$ l'écriture $f = \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$.

**Def 2 :** Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ étagée. On appelle intégrale de $f$ par rapport à la mesure $\mu$ la quantité $\int_X f \, d\mu := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f=\alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

**Thm 3 :** (lemme fondamental d'approximation) Soit $f : X \to \mathbb{K}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) mesurable. Il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions étagées telles que, pour tout $x \in X$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.
De plus : (a) Si $f \geq 0$, on peut choisir la suite $(f_n)$ croissante et positive : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq f_n \leq f_{n+1}$.
(b) Si $f$ est bornée, on peut choisir la suite de sorte que $f_n$ converge uniformément vers $f$, ie $\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

**Def 4 :** Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. On pose $\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu \mid \varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ étagée}, \varphi \leq f \right\}$
Cette quantité vit dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ car la fonction nulle est étagée, d'intégale nulle et minore $f$.
On dit de plus que $f$ est $\mu$-intégrable si $\int_X f \, d\mu < +\infty$.

**Prop 5 :** (a) Si $f$ étagée positive, cette définition coïncide avec la précédente.
(b) Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurables et $f \leq g$, alors $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

**Thm 6 :** (Beppo-Levi) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables de $X$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.
Alors $f := \lim_{n \to +\infty} f_n$ est mesurable positive, et on a $\int_X f \, d\mu = \lim\limits^{\uparrow}_n \int_X f_n \, d\mu$.

**Prop 7 :** Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurables. On a les propriétés suivantes :
(a) $f \leq g \Rightarrow 0 \leq \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$ (croissance)
(b) $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$ (additivité)
(c) Pour tout $\lambda \geq 0$, $\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu$ (positive homogénéité)

**Rem 8 :** • Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Alors : $\int_X f \, d\mu = 0 \iff \mu(\{f \neq 0\}) = 0$.
• Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurables. Alors : $f = g$ $\mu$-pp $\Rightarrow \int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

**Prop 9 :** (Inégalité de Markov) Soit $f$ mesurable positive. Alors :
$\forall A>0$, $\mu(\{f \geq A\}) \leq \frac{1}{A}\int_X f\,d\mu$. En particulier, $\int_X f\,d\mu < +\infty \Rightarrow \mu(\{f=+\infty\})=0$

**Def 10 :** • Une fonction $f : X \to \mathbb{K}$ est $\mu$-intégrable si $|f|$ est intégrable.
On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|\,d\mu < +\infty \right\}$.
• Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, on note $f^+ = f\mathbb{1}_{f\geq 0}$, $f^- = -f\mathbb{1}_{f\leq 0}$, de sorte que $f^+, f^- : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ et $f = f^+ - f^-$.
• Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, on pose $\int_X f\,d\mu := \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu$.
• Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, on pose $\int_X f\,d\mu := \int_X \mathrm{Re}(f)\,d\mu + i\int_X \mathrm{Im}(f)\,d\mu$.

**Rem 11 :** Ces définitions étendent les précédentes, et pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, on récupère les propriétés de linéarité (additivité et homogénéité).

**Prop 12 :** (Inégalité triangulaire) (a) $\forall f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$.
(b) (Cas d'égalité) - $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ : on a égalité ssi $f$ est de signe constant $\mu$-pp
- $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ : égalité ssi $f$ est d'argument constant, i.e. $\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha|=1$, $f = \alpha|f|$ $\mu$-pp

**Ex 13 :** Pour $X=\mathbb{N}$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\nu$ mesure de comptage, on a :
$\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu) = \ell^1_{\mathbb{K}}(\nu) := \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty \right\}$, i.e. $\int_{\mathbb{N}} |u|\,d\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
Si cette somme est finie (i.e. $(u_n) \in \ell^1_{\mathbb{K}}(\nu)$), on a : $\int_{\mathbb{N}} u\,d\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

## II - Grands résultats de convergence, intervertion, changement de variables

**Thm 14 :** (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. Alors : $0 \leq \int_X \liminf f_n\,d\mu \leq \liminf \int_X f_n\,d\mu$.

**Thm 15 :** (Convergence dominée) Soit $(f_n) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)^{\mathbb{N}}$ (où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $f$ mesurable t.q.
(i) $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ $\mu$-pp.
(ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu$-pp (domination $\mu$-pp).
Alors $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$, et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

**Ex 16 :** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

**Contre-ex 17 :** $f_n := n\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}]}$ met en défaut l'hypothèse de domination ainsi que le résultat : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n\,d\lambda = 1$, mais $\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n\,d\lambda = 0$.



Applications aux intégrales à paramètre : Soit $(S,d)$ un espace métrique.

**Thm 18 :** (continuité sous le signe intégrale)
Soit $f : S \times X \to \mathbb{K}$ fonction. Si :
(i) $\forall s \in S$, $f(s,\cdot)$ est $\mathcal{A}$-mesurable
(ii) Pour $\mu$-presque tout $x \in X$, $f(\cdot,x)$ est continue.
(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall s \in S$, $|f(s,\cdot)| \leq g$ $\mu$-pp.
Alors : $F : s \mapsto \int_X f(s,x)\,d\mu(x)$ est bien définie et continue sur $S$.

**Ex 19 :** Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. $\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\,dx$ est bien définie et continue.

**Thm 20 :** (dérivation sous le signe intégrale)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert non vide. Soit $f : I \times X \to \mathbb{K}$ fonction.
Si : (i) $\forall s \in I$, $f(s,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$.
(ii) Pour $\mu$-presque tout $x \in X$, $f(\cdot,x)$ est dérivable, de dérivée notée $\partial_1 f(\cdot,x)$.
(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu)$, $\forall s \in I$, $|\partial_1 f(s,\cdot)| \leq g$ $\mu$-pp.
Alors : $F : s \mapsto \int_X f(s,x)\,d\mu(x)$ est bien définie, dérivable sur $I$ de dérivée donnée par $F'(s) = \int_X \partial_1 f(s,x)\,d\mu(x)$.

**Thm 21 :** Soient $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés t.q. $\mu$ et $\nu$ soient $\sigma$-finies. Alors il existe une unique mesure $\mu\otimes\nu$ sur $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ t.q. $\forall (A,B) \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$, $\mu\otimes\nu(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$.

**Thm 22 :** (Fubini-Tonelli) Soient $f : (X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable, $\mu,\nu$ $\sigma$-finies sur $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$. Alors :
(a) Les fonctions $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ sont définies partout et $\mathcal{A}$-mesurable (resp. $\mathcal{B}$-mesurable).
(b) $\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

**Thm 23 :** (Fubini-Lebesgue) On considère les mêmes espaces, et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu\otimes\nu)$ (où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors :
(a) $\mu$-pp $x \in X$, $y \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu)$, $\nu$-pp $y \in Y$, $x \mapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$
(b) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu)$,
ces fonctions étant définies resp. $\mu$-pp et $\nu$-pp.

(c) $\int_{X\times Y} f d\mu\otimes\nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y)$

**Ex 24:** Soit $X$ une variable aléatoire réelle positive. Alors :

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq t)\,dt \quad \text{(Fubini-Tonelli)}.$$

**Contre-ex 25:** $f : ]0,1[\times]0,1[ \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

On a : $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy$, car $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$.

**Thm 26:** (changement de variables)

Soient $\Delta, D$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$, $\varphi : \Delta \to D$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Pour toute fonction mesurable $f : D \to \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^d}(\lambda_{|D})$ ssi $(f\circ\varphi)|J_\varphi|$ est $\lambda_{|\Delta}$-intégrable, et alors :

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta (f\circ\varphi)(u)\,|J_\varphi(u)|\,du$$, où $|J_\varphi|$ est le det. de la Jacobienne de $\varphi$.

**Ex 27:** $D := D(a,R)$, alors : $\mathrm{Aire}(D) = \int_D dx\,dy = \pi R^2$. (passage en polaire)

**Ex 28:** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (polaire et Fubini-Tonelli)

## III - Espaces $\mathcal{L}^p$, espaces $L^p$

Dans ce qui suit, $p$ sera un réel $\geq 1$ (sauf mention où $p$ peut être $+\infty$)

**Def 29:** On définit $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu) := \left\{ f : (X,\mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \text{ mesurables} \;\middle|\; \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}$

On le notera souvent $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

De plus : $\forall f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

**Rem 30:** $\|\cdot\|_p$ comme ci-dessus est une semi-norme, pour l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, grâce à des propriétés vues ultérieurement.

**Prop 31:** $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

**Prop 32:** (Hölder) Soient $f, g : X \to \mathbb{K}$ mesurables et $p, q > 1$ deux exposants conjugués (ie deux réels $>1$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$). Alors :

(a) Si $f, g$ sont réelles positives, alors $0 \leq \int_X fg\,d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty$

(b) Si $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

**Prop 33:** (Inégalité de Minkowski) Si $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, on a : $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. En particulier, $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un ev. semi-normé.

**Def-Prop 34:** On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ par : $f \sim g \iff f = g$ $\mu$-pp. On note $L^p := \mathcal{L}^p/\sim$.

Alors $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un EVN.

**Thm 35:** (Riesz-Fischer) $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

**Cor 36:** $(L^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert pour

$$\langle f, g\rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

**Application 37:** (Espace de Bergman du disque unité)

On note $\mathbb{D} := D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, ainsi que

$\mathcal{B}^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ (où $\mathcal{H}(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorphe sur } \mathbb{D}\}$, et où $L^2(\mathbb{D})$ est muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur les $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$).

Alors $\mathcal{B}^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, dont on peut expliciter la base hilbertienne suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$

DEV 1

DEV 2



Ref. principale : Théorie de l'intégration (Briane-Pagès)