Leçon 151 : Sous-espaces stables. Exemples et applications

CHANVILLARD Alexandre, RANGUIS Célian

On se donne un corps K, un K-e.v. E et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes.

1 Définitions et propriétés

Définition 1: Un sous espace F de E est stable par u si $u(F) \subseteq F$. Si $U \subset \mathcal{L}(E)$ est une famille d'endomorphismes, on dit que F est stable par U s'il est stable par tout élément de U.

Remarque 2: Il existe des endomorphismes sans sous-espaces stables non-triviaux. Par exemple, la rotation d'angle $\pi/2$ dans le plan réel, dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 3:

- Tout sous-espace est stable par une homotétie.
- Les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u, et si v commute avec u, alors ils le sont aussi par v.
- Plus généralement, si $P \in K[X]$ et si v commute avec u, alors $\operatorname{Ker} P(u)$ est stable par v.

Contre-Exemple 4: $E = \mathbb{R}^2,\ u : (x, y) \mapsto (y, x),\ v = \lambda \mathrm{id}$ pour $\lambda \in K^\times$. Alors, u et v commutent et $F = \operatorname{Vect}((0, 1))$ est stable par v mais pas par u.

Proposition 5: Si F est stable par u et v, alors il l'est par $u + v$ et $u \circ v$.

Définition 6: Si F est un sous-espace stable par u, on définit l'induit de u sur F $u_F : F \to F$ par $\forall x \in F, u_F(x) = u(x)$.

Proposition 7: Soit F un sous espace de E. Alors, les trois proposition suivantes sont équivalentes

1. F est stable par u
2. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E complétant une base de F, $\operatorname{Mat}(u, \mathcal{B})$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$
3. Il existe une telle base.

Corollaire 8: Soit $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ une décomposition de E en sous-espaces stables par u. Alors, si $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)$ est une base adaptée à cette décomposition et

$M_i = \mathrm{Mat}(u_{F_i}, \mathcal{B})$:

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_n \end{pmatrix}$$

Proposition 9: Si $E = F \oplus G$ est somme de sous-espaces stables par u. Alors $\mu_u = \mathrm{ppcm}\{\mu_{u_F},\ \mu_{u_G}\}$

Lemme 10: Si $P, Q \in K[X]$ sont tels que $P|Q$,
alors $\mathrm{Ker}\, P(u) \subset \mathrm{Ker}\, Q(u)$

Lemme 11: *Lemme des noyaux*
Soient $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ premiers entre eux deux-à-deux et $P = P_1 \cdots P_n$. Alors, $\mathrm{Ker}\, P(u) = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\, P_n(u)$.

Remarque 12: Si P annule u, on obtient une décomposition de E en sous-espaces stables.

Définition 13: On appelle polynôme minimal de u l'unique polynôme unitaire, noté μ_u, qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de u.

Proposition 14: Soit F un sous-espace stable par u, alors $\mu_{u_F}|\mu_u$.

2 Application à la réduction

2.1 Diagonalisation

Définition 15: L'endomorphisme u est dit diagonalisable s'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit diagonale.

Remarque 16: L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il existe une décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ en sous-espaces stables telle que u_{E_i} est une homotétie pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Définition 17: Le polynôme charactéristique de u est
$\chi_u = \det(X\mathrm{id} - u)$.

Remarque 18: Ses racines sont exactement les valeurs propres de u.

Théorème 19: *Cayley-Hamilton*
Le polynôme χ_u annule u

Définition 20:

- Soit λ une valeur propre de u. Le sous-espace propre associé à λ est $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})$.
- La multiplicité algébrique de λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_u, on la note $m_a(\lambda)$.
- Le sous espace charactéristique de E associé à λ est le sous-espace $\mathrm{Ker}(u - \lambda\mathrm{id})^{m_a(\lambda)}$.

Proposition 21: Les sous espaces propres et charactéristiques de u sont stables par u (car noyaux de polynômes en u).

Lemme 22: Soit F un sous-espace stable par u, alors $\chi_{u_F}|\chi_u$.

Proposition 23: Soit $E = F \oplus G$ une décomposition en sous-espaces stables par u. Alors $\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$.

Théorème 24: Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable.
2. E est somme directe des sous espaces propres de u.
3. Il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.
4. μ_u est scindé à racines simples.

Remarque 25: Si u est diagonalisable et F est stable par u, u_F est diagonalisable

Application 26: Si u est diagonalisable, ses sous-espaces stables sont les sommes directe de sous-espaces vectoriels de ses sous-espaces propres. Plus précisément, notons $E_1, \ldots, E_r$ les sous-espaces propres de u. Si F est table par u, on peut décomposer $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ où chaque F_i est un sous-espace vectoriel de E_i.

2.2 Trigonalisation

Définition 27: L'endomorphisme u est dit trigonalisable s'il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base soit triangulaire supérieure.

Définition 28: Un drapeau sur E est une suite $\{0\} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = E$ de sous-espaces vectoriels. Il est dit complet si $n = \dim(E)+1$. Il est dit stable par u si chacun des F_i l'est.

Remarque 29: L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si il existe un drapeau complet stable par u.

Proposition 30: Il existe un drapeau complet stable par u si et seulement si χ_u est scindé. En particulier, si K est algébriquement clot, tout endomorphisme est trigonalisable.

2.3 Co-diagonalisation

Définition 31: Soit U une famille de $\mathcal{L}(E)$, on dit que U est codiagonalisable s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ en sous-espaces stables par U et tel que, pour tout $u \in U$, u_{E_i} est une homotétie.

Théorème 32: Soit $U = (u_i)_{i\in I}$ une famille finie d'endomorphismes diagonalisables telle que $\forall i, j \in I,\ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Alors, U est codiagonalisable.

Exemple 33: Supposons ici que K est algébriquement clos et de charactéristique nulle. Soit $G \subset GL(E)$ un sous-groupe abélien fini. Alors G est co-diagonalisable.

2.4 Dunford

On suppose ici que E est de dimension finie.
Définition 34: L'endomorphisme u est dit nilpotent s'il exite un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que u^n est l'endomorphisme nul.

Théorème 35: Supposons que u annule un polynôme scindé. Alors, $\exists!(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que :

- $u = d + n$
- $d \circ n = n \circ d$
- d est diagonalisable et n est nilpotentes

De plus, n et d sont des polynômes en u.

Remarque 36: Notons u l'endomorphisme donnée dans la base canonique par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Alors, $M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:D,\text{ diagonalisable}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:N,\text{ nilpotente}}$ mais la décomposition de Dunford de u est u lui-même puisqu'il est diagonalisable. Ceci ne contredit pas l'unicité puisque $ND \neq DN$.

Application 37: On suppose ici que E est un $\mathbb{R}$-e.v. et on définit, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \in \mathcal{L}(E)$$

l'exponentielle de u. Alors, e^u est diagonalisable si et seulement si u l'est.

3 Endomorphismes particuliers

3.1 Endomorphismes normaux [Rom]

On se donne ici $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.
Définition 38: L'endomorphisme u est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

DEV 1

Lemme 39: Soit u un endomorphisme normal et F un sous-espace stable par u. Alors, il existe un supplémentaire de F stable par u.

Proposition 40: Soit u un endomorphisme normal. Alors u admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2

Théorème 41: Soit u un endomorphisme normal. Alors il existe une décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ en sous-espaces stables par u de dimensions 1 ou 2. De plus, si i est tel que $\dim F_i = 2$,

alors il existe une base $\mathcal{B}_i$ de F_i tel que $\mathrm{Mat}(u_{F_i}, \mathcal{B}_i)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

3.2 Endomorphismes nilpotents [Cal+]

DEV 2

Lemme 42: *(Lemme de Fitting)* Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension d. La suite croissante des sous-espaces stables $(\mathrm{Ker}(u^k))_{k\geq 0}$ et la suite décroissante des sous-espaces stables $(\mathrm{Im}(u^k))_{k\geq 0}$ stationnent à partir d'un même rang n_0, et on a :

$$E = \mathrm{Ker}(u^{n_0}) \oplus \mathrm{Im}(u^{n_0})$$

Application 43: Soit n_d le nombre de matrices nilpotentes de taille $d \times d$ à coefficients dans K un corps fini de taille q.
Alors on a que $n_d = q^{d(d-1)}$.

3.3 Sous groupe de $GL(E)$ [Ber]

On se donne ici un sous-groupe $G \subset GL(E)$ fini et tel que $car(K) \nmid |G|$.
Définition 44: On dira qu'un sous-espace de E est G-irréductible s'il est non nul et n'admet pas lui-même de sous-espaces stables par G.

DEV 3

Théorème 45: Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par G. Alors, F admet un supplémentaire dans E stable par G.

Corollaire 46: *Théorème de Maschke*
On suppose ici que E est de dimension finie et $E \neq \{0\}$. Alors, E est est décomposable en une somme finie de sous-espaces G-irréductibles.

Commentaires

Leçon assez embêtante a préparer puisque la pluspart des livres n'ont pas de partie *sous-espaces stables* dédiée. On a surtout utilisé "Algèbre Linéaire"(Mansuy et Mneimné []) qui en a une. Moins utilisé mais "Objectif agrégation"(Beck, Malick et Peyré []) en a une aussi.
Les sous-parties de la section 3 peuvent être retirées si on ne fait le dev qu'elles contiennent.
Dans les parties 2 et 3, on reformule tout en terme de sous-espaces stables pour coller au mieux à la leçon.
La section 2.3 parle sans le dire vraiment de représentations.

Références

[Bec+] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation*. Librairie Didier.

[Ber] Grégory Berhuy. *Algèbre : le grand combat*. Première édition. Calvage & Mounet, 2018.

[Cal+] Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de Voyage en algébrie*. Calvage & Mounet.

[Man+] Roger Mansuy et Rached Mneimné. *Algèbre Linéaire*. 3e éd. deboeck.

[Rom] Jean-Etienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégagtion. Algèbre et géométrie*. deboeck.